**INFORMAÇÕES GERAIS DO TRABALHO**

**Título do Trabalho:** Equações Diferenciais na Engenharia Civil: Equação da Curva Elástica

**Autor (es):** Mariana Moreira Souza, Ceile Cristina Ferreira Nunes

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, deflexão, vigas, linha elástica

**Campus:** Avançado Piumhi

**Área do Conhecimento (CNPq):** Engenharia Civil

## RESUMO

Grande parte da teoria estudada em Engenharia Civil é permeada de conceitos matemáticos, desde a geometria analítica, passando pela álgebra linear e pelo cálculo diferencial e integral. O estudo de equações diferencias e suas aplicações à Engenharia compõe o objetivo principal deste trabalho, com estudo centrado na flexão de vigas. Foram selecionados livros e publicações científicas a partir das plataformas Google Scholar e periódicos capes, para compor e fundamentar a revisão bibliográfica da presente pesquisa, abordando os seguintes assuntos: aplicações de Equações Diferenciais Parciais, equação da onda, e deflexão de vigas. Em seguida, foi realizado um estudo aprofundado sobre a relação entre a Equação da Onda e a deflexão de vigas, que teve como objetivo fazer uma demonstração da curva da linha elástica apresentada por autores como Hibbeler, (2010). O estudo do comportamento dos elementos de vigas, permitiu a observação de uma gama muito grande de aplicações de equações diferenciais, o que gerou um estímulo a continuar nesse campo de pesquisa, descobrindo assim a infinidade de aplicações que a matemática possibilita para explicar fenômenos naturais e reais na engenharia civil.

## INTRODUÇÃO:

As Equações Diferenciais têm um relevante papel em diversas ciências, tais como na química, na física, na economia e também na engenharia civil. Estas equações podem ser ordinárias ou parciais, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) possuem uma ou várias derivadas da função incógnita que dependem de apenas uma variável. Já no caso das Equações Diferenciais Parciais (EDP) a função incógnita que depende de mais de uma variável. De acordo com Boyce (2015) as EDPs foram estudadas por Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange, e podem ser utilizadas para descrever fenômenos como a propagação de ondas (Equação da Curva Elástica ou Equação da Onda), a propagação de calor (Equação do Calor). Uma das possíveis aplicações da Equação da Onda, objeto de estudo do presente trabalho, é no delineamento da curva de deflexão de uma viga, a chamada de linha elástica. Sua forma geral é apresentada na Equação 1, a seguir:

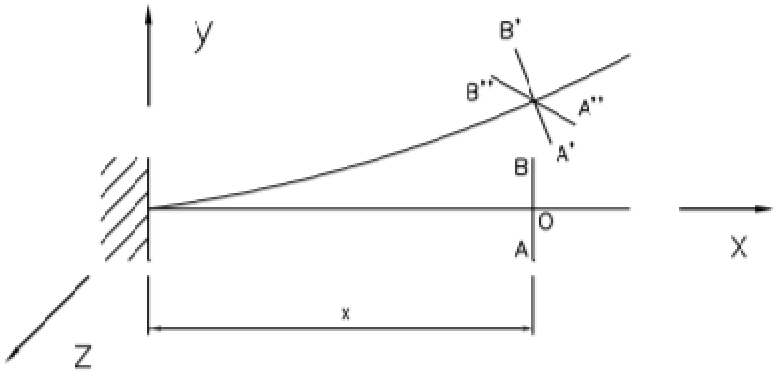
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Equação 1}$$

Onde *u* é uma função que depende de *t* e *x*, os quais são variáveis de tempo e espaço, respectivamente.

Para limitar o grau de deflexão que uma viga pode sofrer, quando submetida a um determinado carregamento, pode-se utilizar diversas ferramentas como, por exemplo, o método da integração, o método da conservação de energia, ou através da resolução da EDP com os valores de contornos corretos, dependendo de cada situação.

A teoria de Timoshenko adiciona efeitos de cisalhamento nas seções transversais durante a flexão da viga. Ao contrário das deflexões de vigas do modelo de Euler-Bernoulli, nos quais se tinham apenas componentes de deformação longitudinal ou transversal, no modelo de Timoshenko tem-se ambas componentes longitudinal e angular.

**Imagem 1:** Deflexão Timoshenko




**Fonte:** http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf

Na imagem 1, tem-se uma comparação da seção transversal AB, entre o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko. A seção AB sofreu um deslocamento vertical igual para os dois modelos, entretanto, a seção A''B'' sofreu ainda uma deformação angular, causada pelo efeito do cisalhamento, que é considerado no modelo de Timoshenko.

## METODOLOGIA:

Foram selecionados livros e publicações científicas a partir das plataformas Google Scholar e periódicos capes, para compor e fundamentar a revisão bibliográfica da presente pesquisa, abordando os seguintes assuntos: aplicações de Equações Diferenciais Parciais, equação da onda, e deflexão de vigas. Em seguida, foi realizado um estudo aprofundado sobre a relação entre a Equação da Onda e a deflexão de vigas, que teve como objetivo fazer uma demonstração da curva da linha elástica apresentada por autores como Hibbeler, (2010). Os resultados deste estudo são apresentados na seção seguinte.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES:

Quando uma viga é submetida a uma determinada carga, ela pode sofrer uma deflexão. Após essa deformação o seu eixo se transforma em uma curva/linha elástica.

Sabendo que a curvatura de uma curva dada por uma função vetorial r é dada por:

$\square = \frac{|\square'(\square) \times \square''(\square)|}{|\square'(\square)|^3}$ ou $\square = \frac{|\square'(\square)|}{|\square'(\square)|}$

Sendo $\square(\square)$ um vetor tangente unitário, temos:

$$\square(\square) = \frac{\square'(\square)}{|\square'(\square)|}$$

Como a primeira derivada da função é a inclinação, temos também que:

$$\left|\square'(\square)\right| = \frac{\square\square}{\square\square}$$

Logo, o vetor $\square'(\square)$ é dado por: $\square'(\square) = \left|\square'(\square)\right| . \square(\square)$

Pela regra do produto temos: $\square''(\square) = \square'(\square).\frac{\square\square}{\square\square} + \square(\square).\frac{\square^2\square}{\square\square^2}$

Temos então os vetores: $\square'(\square) = < 0, \square(\square).\frac{\square\square}{\square\square}, 0 >$

$$\square''(\square) = < 0, 0, \square'(\square).\frac{\square\square}{\square\square} + \square(\square).\frac{\square^2\square}{\square\square^2} >$$

Calculando o produto vetorial $\square'(\square) \times \square''(\square)$ , temos:

$\square'(\square) \times \square''(\square) = \square(\square).\frac{\square\square}{\square\square} . \square'(\square).\frac{\square\square}{\square\square} + \square(\square).\frac{\square\square}{\square\square} . \square(\square).\frac{\square^2\square}{\square\square^2}$

Como $\square(\square) \times \square(\square) = 0$ , o produto vetorial é dado por:

$$\square'(\square) \times \square''(\square) = \left( \square(\square). \square'(\square)\right) . (\frac{\square\square}{\square\square})^2$$

Sabendo que $\square(\square)$ e $\square'(\square)$ são ortogonais, e que $|\square(\square)| = 1$, já que é um vetor unitário, teremos:

$$|\square'(\square) \times \square''(\square)| = | \square(\square) \times \square'(\square)| . (\frac{\square\square}{\square\square})^2$$

$$= \left|\square'(\square)\right|. (\frac{\square\square}{\square\square})^2$$

$$\left|\square'(\square)\right| = \frac{|\square'(\square) \times \square''(\square)|}{(\frac{\square\square}{\square\square})^2}$$

$$\left|\square'(\square)\right| = \frac{|\square'(\square) \times \square''(\square)|}{|\square'(\square)|^2}$$

Voltando em: $\square = \frac{|\square'(\square)|}{|\square'(\square)|}$ , temos:

$$\square = \frac{|\square'(\square) \times \square''(\square)|}{|\square'(\square)|^3}$$

Neste caso, teríamos:

$$\square'(\square) = < 1, \frac{\square\square}{\square\square}, 0 >$$

$$\square''(\square) = < 0, \frac{\square^2\square}{\square\square^2}, 0 >$$

$$|\square'(\square) \times \square''(\square)| = |\frac{\square^2\square}{\square\square^2}|$$

Se $\square'(\square) = < 1, \frac{\square\square}{\square\square}, 0 >$, então:

$$|\square'(\square)| = \sqrt{1 + (\frac{\square\square}{\square\square})^2}$$

Logo, a curvatura da linha elástica é dada por:

$$\square = \frac{1}{\square} = \frac{\square^2\square/\square\square^2}{[1+\left(\frac{\square\square}{\square\square}\right)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

## CONCLUSÕES:

O estudo proposto propiciou a construção dos conhecimentos necessários para a análise das equações diferenciais parciais, método amplamente utilizado para a resolução de vários problemas em engenharia civil. A elaboração da demonstração do resultado utilizado por vários autores em Resistência dos Materiais e Teoria das estruturas, auxiliou o raciocínio lógico e abre espaço para a busca de novos conceitos físicos e de engenharia.

Portanto, o estudo apresentado tem sua importância descrita na relação matemática-engenharia, fornecendo ferramentas úteis e indispensáveis para o entendimento de fenômenos que estão à nossa volta cotidianamente, mas que passam despercebidos por serem estruturas prontas e acabadas.

Ao estudarmos o comportamento dos elementos de vigas, observamos uma gama muito grande de aplicações de equações diferenciais e um estímulo a continuar nesse campo de pesquisa, descobrindo assim a infinidade de aplicações que a matemática possibilita para explicar fenômenos naturais e reais na engenharia civil.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CONGRO, Marcello. **Equações diferenciais parciais e suas aplicações.** Disponível em: <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2016/relatorios_pdf/ctc/MAT/MAT-Marcello%20Congro%20Dias%20da%20Silva.pdf>. Data do acesso: 24 de abril de 2018.

SAIKI, Marcelo Eiji. **Equação da onda unidimensional: um estudo analítico e numérico.** 2006. 15 f. Monografia (Graduação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais I.** 7. ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BOYCE, W. e DIPRIMA, R.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.